Synthèse Test du rapport de vraisemblance (LRT)

June 2022

# Introduction

Nous allons dans ce présent document faire un synthèse du Test du rapport de vraisemblance en présentant brièvement le test, sa méthodologie et enfin donner (en guise d’exemple) une implémentation du test sur python.  
  
Pour réaliser un Test du rapport de vraisemblance connaître la notion de test statistique, de vraisemblance, de généralité en probabilité (variable aléatoire, densité de loi,...) peuvent être utiles

## Notion de Test statistique

En statistiques, un test, ou test d’hypothèse, est une procédure de décision entre deux hypothèses. Il s’agit d’une démarche consistant à rejeter ou à ne pas rejeter une hypothèse statistique, appelée hypothèse nulle **H0**, en fonction d’un échantillon de données. **H1** est l’hypothèse complémentaire à **H0**.

A partir de calculs réalisés sur des données observées, on émet des conclusions sur la population, en leur rattachant des risques d’être erronées.  
  
**Exemple** : Soit une suite de variable aléatoire (une série d’observations) suivant une loi normale de moyenne et de variance : .

est un test statistique qui permet de savoir si est centrée ()

## Densité d’une loi de probabilité

La densité d’une variable aléatoire est une fonction qui décrit le comportement aléatoire d’un phénomène dépendant du hasard. Pour une variable aléatoire de densité , permet d’avoir des informations sur ,de pouvoir calculer des probabilités de X , de calculer son espérance (moyenne), sa variance etc.

**Exemple** : Soit une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre . Alors la densité de est la fonction :

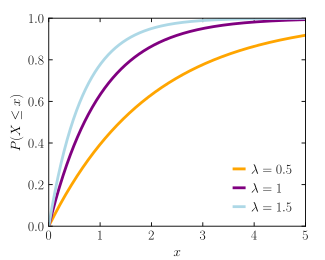


Figure : Densité d’une loi exponentielle de paramètre

## Notion de Vraisemblance

La fonction de vraisemblance (ou plus simplement vraisemblance) est une fonction des paramètres d’un modèle statistique calculée à partir de données observées. La fonction de vraisemblance joue un rôle clé pour les estimations de paramètres statistiques.

Pour une suite de variables aléatoires de densité . On calcul la fonction de vraisemblance en faisant le produit des densités pour chaque observation :

est le paramètre de notre modèle : Le paramètre d’un modèle est une grandeur qui intervient dans l’expression des fonctions représentatifs(densité, espérance, variance...) de notre modèle. **Exemple** : Pour un modèle exponentiel de paramètre , son espérance est .

# Test du rapport de vraisemblance (LRT)

Le test de rapport de vraisemblance est un test d’hypothèse qui compare l’adéquation de l’ajustement de deux modèles afin de déterminer celui qui offre le meilleur ajustement pour les données échantillons : un modèle non contraint dont tous les paramètres sont libres et son modèle contraint correspondant avec moins de paramètres pour tester l’hypothèse nulle.

Pour simplifier, le test du rapport de vraisemblance nous permet tout juste de comparer deux modèles statistiques afin de choisir celui qui s’ajuste le mieux a nos données.  
  
**Exemple** :

* Modèle 1 : variables de prédictions (Age, Poids, Taille, Sexe)
* Modèle 2 : variables de prédictions (Age, Sexe)

Un test de rapport de vraisemblance permet dans ce cas de choisir le modèle qui s’ajuste au mieux a nos données entre Modèle 1 et Modèle 2.

## Méthodologie du Test

La Méthodologie du test peut être un peu technique mais n’est pas une nécessité pour pouvoir effectuer le Test.  
  
Supposons un modèle statistique dans un espace de paramètre . On considère comme hypothèse nulle du test : le paramètre appartient a (sous ensemble de ).

L’hypothèse complémentaire est alors : le paramètre n’appartient pas a (sous ensemble de ).

Le rapport de vraisemblance est donné par :

est le plus grand valeur de sur l’ensemble .  
  
 est l’estimateur du maximum de vraisemblance sous H0 (quand H0 est vrai).  
  
 est l’estimateur du maximum de vraisemblance de notre notre modèle.  
  
**Nota bene** : l’estimateur du maximum de vraisemblance noté est la valeur de qui maximise la fonction de vraisemblance .  
  
La **statistique du test** est :

. On peut aussi l’écrire en utilisant la log-vraisemblance par :

ou   
  
**Nota bene :** La statistique de test est la grandeur a partir duquel on va donner nos conclusion par rapport a notre test. En effet connaissant la statistique du test, ici , on peut déterminer sa loi et calculer la p-valeur de cette loi pour en fin décider de rejeter ou non l’hypothèse H0 a l’aide du risque   
  
Le choix d’accepter ou de rejeter se fait comme suit :

* si : rejeter
* si : ne pas rejeter

est choisi que sorte que le risque que l’on commet en rejetant sachant que est vrai soit petit. C’est a dire :

est le risque de première espèce . Généralement on prend   
  
Dans la pratique on applique le théorème de Wilks pour décider de rejeter ou non l’hypothèse .  
  
**théorème de Wilks** : Sous vraie, la statistique de test converge en loi vers un **chi-2** de degrés de liberté la dimension de l’espace paramétrique .

Ainsi pour rejeter ou non l’hypothèse on calcul la p-valeur d’une distribution de et de décider comme suit :

* si p-valeur < : rejeter
* si p-valeur : ne pas rejeter

## Exemple et Implémentation sur Python

Nous supposons une série d’observation suivant une loi normale de variance dont on ne connaît pas la moyenne.

On souhaite savoir si la moyenne est égale a 2 en réalisant un test du rapport de vraisemblance dont les hypothèses sont comme suit :

* :
* :

. D’après les résultats de la section **2.1 Méthodologie du test**, il nous faut calculer la statistique du Test, la log-vraisemblance de notre série d’observation et d’appliquer le théorème de Wilks.

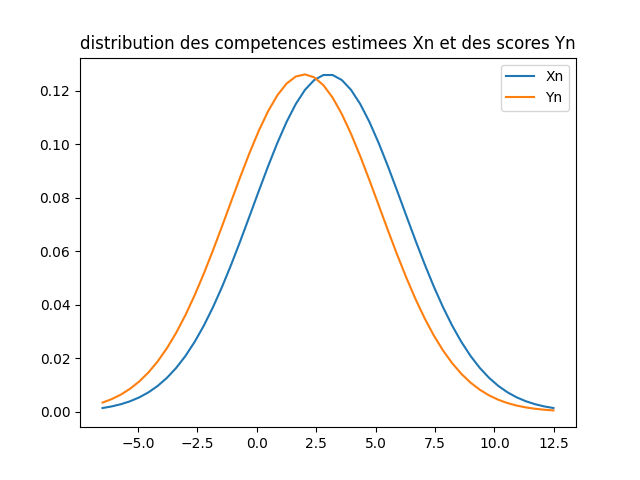
Pour une loi normale de moyenne et de variance l’expression de la fonction de log-vraisemblance est :

Nous allons a l’aide de cette expression calculer la statistique du test () et appliquer le théorème de Wilks pour rejeter ou non l’hypothèse : On sait que la statistique sous H0 suit un . On calcul donc la p-valeur d’une et de le comparer avec notre risque de première espèce .  
  
**Voir Code lrt.py**

# Exemple

L’objectif du test LRT est de connaître si un modèle quelconque s’ajuste aux données . Pour le vérifier, les algorithmes génèrent des données a partir du modèle et de comparer statistiquement les deux distributions et (en regardant s’il ont la même espérance, même densité etc). S’ils sont conformes à une tolérance près, l’algorithme conclue que le modèle s’ajuste aux données .

Nous allons utiliser le même principe pour étudier le niveau d’ajustement d’un modèle d’estimations de compétence des candidats a un questionnaire sur la mythologie grecque. On suppose disposer de candidats et un questionnaire de 24 questions sur la mythologie grecque. On utilise un modèle IRT (item réponses theory) pour estimer les compétences de nos candidats. On suppose un intervalle de compétence entre 0 et 4. Soit les compétences estimées et les scores réels obtenues par nos candidats. On suppose que et suivent une distribution normale de même variance ( et peuvent aussi avoir différentes variances).



On remarque aussi que la moyenne de (les scores réels de nos candidats) est égal a 2 (le nombre 2 est juste un exemple on pourrait prendre une autre valeur aussi). Donc si la moyenne de est aussi égal a 2. On pourra conclure que et ont même loi (parce qu’ils ont la même moyenne). En conséquence notre modèle IRT s’ajuste aux données (ici le questionnaire). On va tester si la moyenne de est égal a 2. Soit ci-dessous et nos hypothèses de test :

* :
* :

. D’après les résultats de la section **2.1 Méthodologie du test**, pour effectuer ce test il nous faut calculer la statistique du Test, la log-vraisemblance de , d’appliquer le théorème de Wilks pour décider de l’issue du test.

Comme suit une loi normale de moyenne et de variance l’expression de la fonction de log-vraisemblance est :

Nous allons a l’aide de cette expression calculer la statistique du test () et appliquer le théorème de Wilks pour rejeter ou non l’hypothèse . On sait que la statistique sous H0 suit un chi-2 de paramètre 1 . On calcul donc la p-valeur d’une chi-2 de paramètre 1 () et de le comparer avec notre risque de première espèce . Si l’hypothèse H0 est vrai (), alors le modèle s’ajuste au questionnaire. Sinon le modèle est inadapté.  
  
**Voir Code lrt.py**

# Conclusion

Le Test du rapport de vraisemblance est un test très puissant utilisé dans des situations où l’on veut choisir le modèle le mieux adapté parmi deux modèles candidats. L’aspect technique du Test n’est pas un prérequis pour pouvoir l’utiliser (car il existe des packages sous Python et sous R qui permettent de réaliser ce type test sans le besoin de le connaître en profondeur) cependant des notions de probabilités peuvent aider à mieux interpréter les résultats du Test.